English translation of Mark Kac's first publication: Marek Katz, "On a new way of solving equations of the third degree." Extracted and retyped from *Młody Matematyk*, Rok 1, Kwiecień—Maj 1931, Nr. 4–5, pp. 69–71. (*Young Mathematician* **1**, 4–5, April—May 1931).

The last displayed equation number in Kac's article, "(6)", was originally "(4)", but was corrected by hand in Kac's copy; this retyped version reflects that change. Also, there was a typographical error in the last equation of the editorial note in the published article, where the numerical coefficient "18/7" (derived from the coefficient $-3q/p$ in Kac's equation (6)) appeared originally as "6/7."

MAREK KATZ

(Krzemieniec)

O nowym sposobie rozwiązywania równań stopnia trzeciego.

Chcąc rozwiązać równanie $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, podstawiamy

$$z = x - \tfrac{1}{3}a$$

i otrzymujemy równanie, pozbawione drugiej potęgi niewiadomej:

$$x^3 + px + q = 0, \tag{1}$$

gdzie p i q są wyrazami, zależnemi od a, b, i c. Pragnę tu podać pewien—jak mi się wydaje—nowy sposób rozwiązywania równań typu (1).

Sposób mój polega na znalezieniu takich liczb A, B, m, n, aby przy każdej wartości x była spełniona równość

$$x^3 + px + q = A(x+m)^3 - B(x+n)^3. \tag{2}$$

Wtedy otrzymamy równanie w postaci

$$A(x+m)^3 - B(x+n)^3 = 0 \tag{3}$$

i łatwo je będzie rozwiązać; zauważmy bowiem, że lewa strona równania rozkłada się na czynniki:

$$A(x+m)^3 - B(x+n)^3 = \left[\sqrt[3]{A}(x+m) - \sqrt[3]{B}(x+n)\right] \cdot \left[\sqrt[3]{A^2}(x+m)^2 + \sqrt[3]{AB}(x+m)(x+n) + \sqrt[3]{B^2}(x+n)\right].$$

Przyrównywając ten iloczyn do zera, mamy dwie możliwości:

$$\sqrt[3]{A}(x+m) - \sqrt[3]{B}(x+n) = 0, \tag{4}$$

$$\sqrt[3]{A^2}(x+m)^2 + \sqrt[3]{AB}(x+m)(x+n) + \sqrt[3]{B^2}(x+n) = 0. \tag{5}$$

Jak widzimy, z równania (4) łatwo będzie znaleźć jeden z pierwiastków danego równania (1).

Zajmijmy się przeto znalezieniem liczb A, B, m, i n. Rozwijając prawą stronę równości (2), otrzymamy:

$$x^3 + px + q = (A - B)x^3 + 3(Am - Bn)x^2 + 3(Am^2 - Bn^2)x + (Am^3 - Bn^3).$$

Jeżeli dwa wielomiany jednej zmiennej przybierają przy każdej wartości tej zmiennej równe wartości, to współczynniki przy odpowiednio równych potęgach zmiennej muszą być równe:

$$\begin{gathered} A - B = 1, \\ Am - Bn = 0, \\ Am^2 - Bn^2 = \tfrac{1}{3}p, \\ Am^3 - Bn^3 = q. \end{gathered}$$

Mamy rozwiązać układ 4 równań z 4 niewiadomemi. Z pierwszego równania wyznaczamy $A = B+1$ i podstawiamy do pozostałych równań:

$$\begin{gathered} B(m - n) + m = 0, \\ B(m^2 - n^2) + m^2 = \tfrac{1}{3}p, \\ B(m^3 - n^3) + m^3 = q. \end{gathered}$$

Wyznaczamy teraz zespół $B(m - n) = -m$ i podstawiamy do dwóch ostatnich równań:

$$\begin{gathered} -m(m + n) + m^2 = \tfrac{1}{3}p, \\ -m(m^2 + mn + n^2) + m^3 = q. \end{gathered}$$

Po uproszczeniach otrzymujemy:

$$\begin{gathered} mn = -\tfrac{1}{3}p, \\ m + n = \frac{3q}{p}, \end{gathered}$$

przyczem zakładamy, że $p \neq 0$. (Przypadek, gdy $p = 0$, daje równanie $x^3+q = 0$, którego rozwiązanie nie nasuwa trudności).

Wartości m i n znajdziemy jako pierwiastki równania kwadratowego

$$u^2 - \frac{3q}{p}u - \tfrac{1}{3}p = 0. \tag{6}$$

Jeżeli się okaże, że równanie to ma wyróżnik *dodatni*, to posiada ono dwa pierwiastki *nierówne*. Przyjmując jeden z nich za m, a drugi za n, łatwo będziemy mogli wyznaczyć wartości A i B, mianowicie

$$B = \frac{-m}{m - n}, \quad A = \frac{-n}{m - n}.$$

Podstawiając te wartości do równania (4) mnożąc to równanie obustronnie przez $\sqrt[3]{m - n}$, otrzymamy równanie

$$-\sqrt[3]{n}(x + m) + \sqrt[3]{m}(x + n) = 0.$$

Stąd mamy po uporządkowaniu równanie w postaci:

$$\left(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}\,\right) x = m\sqrt[3]{n} - n\sqrt[3]{m}.$$

Przekształcając prawą stronę, będziemy mieli:

$$\left(\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}\,\right)x=\sqrt[3]{mn}\left(\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}\,\right)\left(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}\,\right),$$

a więc ostatecznie będziemy mieli

$$x=\sqrt[3]{mn}\left(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}\,\right). \tag{7}$$

Podstawiając do tego wzoru wartości m i n, wyznaczone z równania (6), otrzymamy wzór, znany pod nazwą wzoru C a r d a n a.

Przypisek Redakcji.

Udzielając miejsca sposobowi, przedstawionemu przez p. Marka Katza, który jest uczniem VIII klasy gimnazjalnej Liceum Krzemienieckiego, Redakcja musi dodać kilka uwag.

Autor artykułu ograniczyłsię do rozważania przypadku, kiedy wyróżnik równania (6) jest dodatni, czyli przypadku, kiedy wyrażenie

$$\left(\tfrac{1}{2}q\right)^2+\left(\tfrac{1}{3}p\right)^3 \tag{8}$$

ma wartość dodatnią.

Z teorji równania trzeciego stopnia wiadomo, że w tym przypadku równanie (1) posiada jeden pierwiastek rzeczywisty. Metoda, opisana w artykule, odnosi się do znalezienia tego pierwiastka.

W przypadku, kiedy wyrażenie (8) jest zerem, wyróżnik równania (6) jest zerem, a więc równanie to posiada pierwiastek podwójny:

$$m=n=\frac{3q}{2p}.$$

Ale w tym przypadku wzór (7) przybiera postać $x=\dfrac{3q}{p}$, i nietrudno sprawdzić przez bezpośrednie podstawienie, że wzór ten daje pierwiastek równania (1).

W przypadku, kiedy wyrażenie (8) ma wartość ujemną, m i n nie są liczbami rzeczywistemi. Zachodzi tu przypadek, znany pod nazwą *casus irreducibilis*,—tym osobliwy, że w tym przypadku równanie trzeciego stopnia posiada trzy pierwiastki rzeczywiste, ale nie można ich wyznaczyć drogą algebraiczną. Rzecz jasna, że i metoda, opisana przez p. M. Katza, zawodzi w tym przypadku. W samej rzeczy, równanie

$$(x-1)(x-2)(x+3)=0$$

posiada trzy pierwiastki: $+1, +2, -3$. Rozwijając lewą stronę, otrzymujemy równanie

$$x^3-7x+6=0,$$

mamy więc wartości: $p=-7$, $q=6$. Równanie (6) przybiera postać[1]

$$u^2+\tfrac{18}{7}u+\tfrac{7}{3}=0.$$

Łatwo sprawdzić że równanie to nie posiada pierwiastków rzeczywistych, a więc nie można wyznaczyć rzeczywistych wartości m i n, skąd jednak nie wynika, by dane równanie trzeciego stopnia nie posiadało pierwiastków.

[1] W oryginalnym artikule ułamek “18/7” został błędnie wpisany jako “6/7”.